# TRIGONOMÉTRIE2

**Leçon : TRIGONOMÉTRIE2**
**Présentation globale**

**Leçon : les équations et inéquations trigonométriques**
**I) les équations trigonométriques élémentaires**
II) les inéquations trigonométriques élémentaires.

## I) Les équations trigonométriques élémentaires

### 1) Equation: $\cos x = a$

**Propriété :** Soit a un nombre réel.

Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors l'équation $\cos x = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $S = \varnothing$.

Si $a = -1$ alors on a l'équation $\cos x = -1$

On sait que : $\cos \pi = -1$ donc tous les réels de la forme : $\pi + 2k\pi$ avec $k$ un nombre relatif sont solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ et on a : $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ .

Si $a = 1$ alors on a l'équation $\cos x = 1$ :

On sait que : $\cos 0 = 1$ donc tous les réels de la forme : $0 + 2k\pi$ avec $k$ un nombre relatif sont solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ et on a : $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ .

Si $-1 < a < 1$ réels alors on a l'équation $\cos x = a$ :

Et on sait qu'il existe un unique réels : $\alpha$ dans $]0 ; \pi]$ tel que $\cos x = \cos \alpha$ et alors on a :

$S = \{\alpha + 2k\pi ; -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Exemple :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ c) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

**Correction:** a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ ssi $\cos x = -\cos \frac{\pi}{3}$ ssi

$\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ ssi $\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

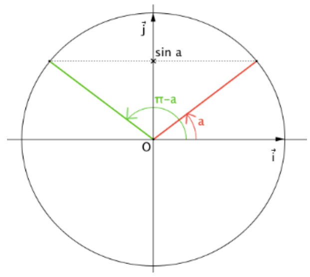
c) $\cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4}$ ou $\cos x = \cos \frac{3\pi}{4}$

Ainsi :

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\} avec\ k \in \mathbb{Z}$

### 2)Equation: $\sin x = a$




**Propriété :** Soit a un nombre réel.

Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors l'équation $\sin x = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$ .

Si $a = -1$ alors on a l'équation $\sin x = -1$ On sait que : $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ donc les solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Si $a = 1$ alors on a l'équation : $\sin x = 1$ On sait que : $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ donc on a : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Si $-1 < a < 1$ réels alors on a l'équation $\sin x = a$ :

Et on sait qu'il existe un unique réels : $\alpha$ dans $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right]$ tel que $\sin x = \sin \alpha$ et alors on a :

$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi ; \pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Exemple :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin x = -\frac{1}{2}$ c) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

**Correction:** a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ssi $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$

Donc les solutions de l’équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi;\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{2\pi}{3}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$$

b) $\sin x=-\frac{1}{2}$ ssi $\sin x=-\sin\frac{\pi}{6}$ ssi $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

L'équation a pour solution $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ et

$\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l’équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$$

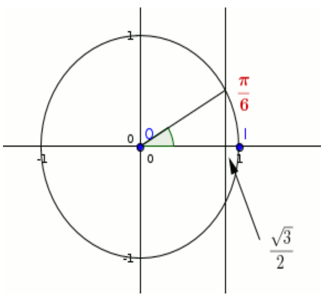
c) $\sin^2 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin^2 x-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\sin x=\sin\frac{\pi}{4}$ ou $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Ainsi : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi;-\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{5\pi}{4}+2k\pi;\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right\} avec\ k\in\mathbb{Z}$

**Exercice1 :** Résoudre dans $\left]-\pi,\pi\right]$ l'équation :

$$\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$




**Solution :** Étape 1 : utiliser le cercle trigonométrique et/ou le tableau de valeurs remarquables afin de retrouver une valeur dont le cosinus vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Le cosinus se lit sur l'axe des abscisses

on peut dire que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est le cosinus de $\frac{\pi}{6}$ par exemple.

Étape 2 : Utiliser ce résultat pour écrire l'équation proposée sous la forme " $\cos U=\cos V$ "

$\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ssi $\cos 2x=\cos\frac{\pi}{6}$

On applique alors la propriété

Donc on a : $2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $2x=-\frac{\pi}{6}+2k'\pi$

Je divise par 2 chaque membre de chaque égalité, j'obtiens $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{12}+k'\pi$ avec $k$ et $k'$ dans

$x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{12}+k'\pi$

- Étape3

Mais il ne va falloir garder que les valeurs de $x$ dans l'intervalle imposé c'est à dire dans $\left]-\pi,\pi\right]$

on a deux méthodes soit encadrement ou on donnant des valeurs a $k$

Pour la première série de valeurs

: $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ avec $k$ dans **Z**

Prenons par exemple la valeur $k=-2$ et remplaçons :

on obtient $x=\frac{\pi}{12}-2\pi$ ; cette valeur n'appartient pas à $\left]-\pi,\pi\right]$ ; il est donc évident que des valeurs de $k$ inférieures à -2 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis $k=-1$ : on obtient $x=\frac{\pi}{12}-\pi$ ; cette valeur appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$.

Il s'agit donc de trouver toutes les valeurs de $k$ telles que les solutions trouvées appartiennent bien à l'intervalle imposé, en appliquant cette démarche de manière systématique.

pour $k=-1$ $x_1=\frac{\pi}{12}-\pi=-\frac{11\pi}{12}$ convient car appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k=0$ $x_2=\frac{\pi}{12}$ convient car appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k=1$ $x=\frac{\pi}{12}+\pi=\frac{13\pi}{12}$ ne convient pas car n'appartient pas à $\left]-\pi,\pi\right]$

Il est inutile de poursuivre pour la première série de valeur (car si pour $k=1$, la valeur trouvée n'appartient plus à l'intervalle, il en sera de même *a fortiori* pour des valeurs supérieures de $k$)

Faisons de même pour la deuxième série de valeurs

$x=-\frac{\pi}{12}+k'\pi$ avec $k'$ dans **Z**

pour $k'=-1$ $x=-\frac{\pi}{12}-\pi=-\frac{13\pi}{12}$ ne convient pas car n'appartient pas à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k'=0$ $x_3=-\frac{\pi}{12}$ convient car appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k'=1$ $x=-\frac{\pi}{12}+\pi=\frac{11\pi}{12}$ convient pas car appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k'=2$ $x=-\frac{\pi}{12}+2\pi$ ne convient pas car n'appartient pas à $\left]-\pi,\pi\right]$

Donc L'ensemble solution de l’équation dans $\left]-\pi,\pi\right]$ **est donc:** $S=\left\{-\frac{11\pi}{12};-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right\}$

**3) Equation :** $\tan x = a$

**Propriété :** Soit a un nombre réel.

L'équation $\tan x = a$ est définie dans $\mathbb{R}$ ssi $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ avec $k$ un nombre relatif

Donc $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Dans $D$ il existe un unique réel : $\alpha$ dans $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x = \tan \alpha$ et alors on a :

$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Exercice2 :1)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes $4\tan x + 4 = 0$

**2)** Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{5\pi}{2}\right]$ l'équations suivantes :

$2\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$

**Correction:** 1) on a $4\tan x + 4 = 0$ est définie dans $\mathbb{R}$ ssi $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ avec $k$ un nombre relatif Donc

$D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

$4\tan x + 4 = 0$ ssi $\tan x = -1$ ssi $\tan x = -\tan\frac{\pi}{4}$

ssi $\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) $2\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$ ssi $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $\sin x = -\sin\frac{\pi}{4}$

L'équation a pour solution $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

et $\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ : $-\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le \frac{5\pi}{2}$

et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-\frac{1}{2} \le -\frac{1}{4} + 2k \le \frac{5}{2}$ Donc $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \le 2k \le \frac{5}{2} + \frac{1}{4}$

Donc $-\frac{1}{8} \le k \le \frac{11}{8}$ Donc $-0{,}12 \le k \le 1{,}37$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ ou $k = 1$

Pour $k = 0$ on trouve $x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\times 0\pi = -\frac{\pi}{4}$

Pour $k = 1$ on trouve $x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\times 1\pi = \frac{7\pi}{4}$

- Encadrement de $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ : $-\frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \le \frac{5\pi}{2}$

et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-\frac{1}{2} \le \frac{5}{4} + 2k \le \frac{5}{2}$ Donc $-\frac{1}{2} - \frac{5}{4} \le 2k \le \frac{5}{2} - \frac{5}{4}$

Donc $-\frac{7}{8} \le k \le \frac{5}{8}$ Donc $-0{,}8 \le k \le 0{,}6$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$

Pour $k = 0$ on trouve $x_3 = \frac{5\pi}{4} + 2\times 0\pi = \frac{5\pi}{4}$

Donc $S = \left\{-\frac{\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}\right\}$

**Exercice3 :1)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

**2)** Résoudre dans $[0 ; \pi]$ l'équations suivantes :

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

**3)** Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ l'équations suivantes :

$\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$

**Correction:** 1) on a $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ssi

$2x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

Ssi $2x - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x + x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ Ssi

$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ et $k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) on a $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ ssi

$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi$ ou $2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$

ssi $3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Donc $x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$ : $0 \le \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \le \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \le \frac{7}{36} + \frac{2k}{3} \le 1$ Donc $-\frac{7}{24} \le k \le \frac{29}{36}$ Donc

$-0{,}29 \le k \le 1{,}2$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ ou $k = 1$

Pour $k=0$ on trouve $\quad x_1=\frac{7\pi}{36}$

Pour $k=1$ on trouve $\quad x_2=\frac{7\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}=\frac{31\pi}{36}$

- Encadrement de $x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$

$0\le\frac{13\pi}{12}+2k\pi\le\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\le\frac{13}{12}+2k\le1$ Donc $-\frac{13}{24}\le k\le-\frac{1}{24}$ Donc

$-0,54\le k\le0,04$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k$ n'existe pas

- Donc $S_{[0,\pi]}=\left\{\frac{7\pi}{36};\frac{31\pi}{36}\right\}$

**3)** on a $\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$ est définie ssi

$2x-\frac{\pi}{5}\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$ ssi $2x\ne\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}+k\pi$

ssi $2x\ne\frac{7\pi}{10}+k\pi$ ssi $x\ne\frac{7\pi}{20}+\frac{k\pi}{2}$ Donc

$D=\mathbb{R}-\left\{\frac{7\pi}{20}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

or on sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ Donc $\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc $2x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ssi $2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}+k\pi$ ssi

$2x=\frac{9\pi}{20}+k\pi$ ssi $x=\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

Encadrement de $\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}\le\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$ donc

$-\frac{1}{2}\le\frac{9}{40}+\frac{k}{2}\le\frac{1}{2}$ donc $-\frac{29}{40}\le\frac{k}{2}\le\frac{11}{40}$

donc $-\frac{29}{40}\le\frac{k}{2}\le\frac{11}{40}$ donc $-\frac{29}{20}\le k\le\frac{11}{20}$ Donc

$-1,45\le k\le0,55$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=-1$

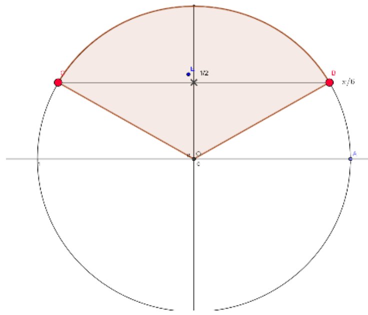
Pour $k=0$ on trouve $\quad x_1=\frac{9\pi}{40}$

Pour $k=-1$ on trouve $\quad x_2=\frac{9\pi}{40}-\frac{\pi}{2}=-\frac{11\pi}{40}$

Donc $S=\left\{-\frac{11\pi}{40};\frac{9\pi}{40}\right\}$

## II) Les inéquations trigonométriques élémentaires

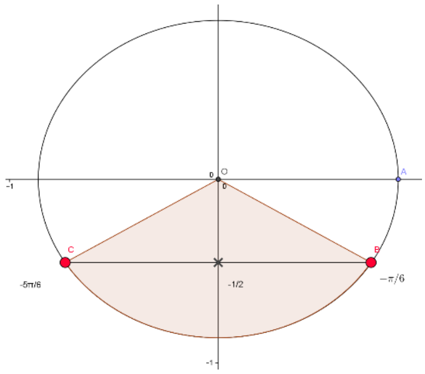
**Exemple1 :** Résoudre dans $[0,2\pi[$ l'inéquation suivante : $\sin x\ge\frac{1}{2}$



$\sin x\ge\frac{1}{2}$ ssi $\sin x\ge\sin\frac{\pi}{6}$

donc $S=\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

**Exemple2 :** Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x\le-\frac{1}{2}$



$\sin x\le-\frac{1}{2}$

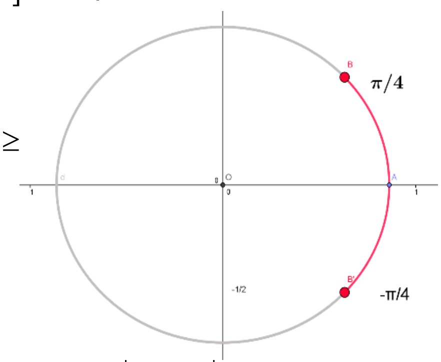
ssi $\sin x\le\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

donc $S=\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$

**Exemple3 :**

Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ l'inéquation suivante :

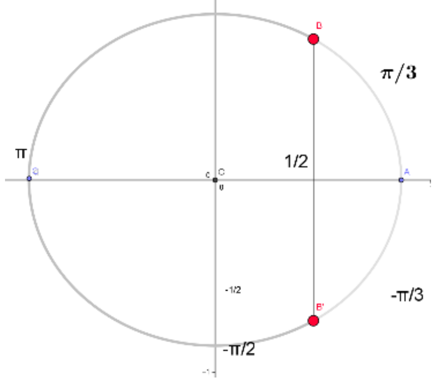
$\cos x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$




$\cos x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $\cos x\ge$

donc $S=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

**Exemple4 :** Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2},\pi\right[$ l'inéquation suivante : $\cos x\le\frac{1}{2}$




$\cos x\le\frac{1}{2}$ ssi $\cos x\le\cos\frac{\pi}{3}$

Donc $S=\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$

**Exemple5 :** Résoudre dans $\left]-\pi,\pi\right]$ les inéquations suivantes : 1) $\cos x \leq 0$ 2) $\sin x \geq 0$

**Solution :** on utilise le cercle trigonométrique

1) $S = \left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

2) $S = [0,\pi]$

**Exemple6 :** Résoudre dans $S = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation suivante : $\tan x \geq 1$

**Solution :**

$S = \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

**Exemple7 :** Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

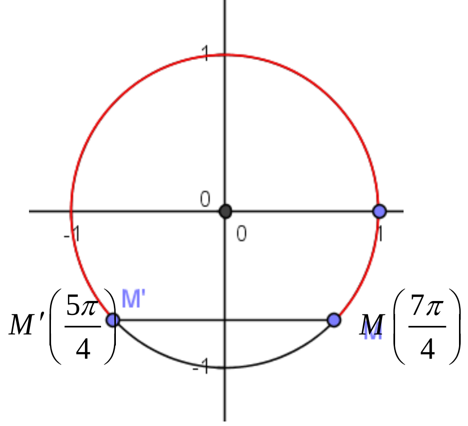
On sait que : $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

L'arc $MM'$ en rouge correspond a tous les points $M(x)$ tq $x$ vérifie $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc

$\sin x \geq \frac{1}{2}$ ssi $\sin x \geq \sin\frac{\pi}{6}$

donc $S = \left[0;\frac{5\pi}{4}\right[ \cup \left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$



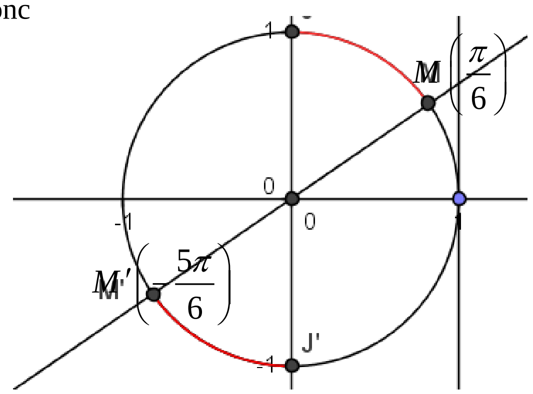

**Exemple8 :** Résoudre dans $[-\pi\,;\pi]$ l'inéquation suivante : $3\tan x - \sqrt{3} \geq 0$

On a $3\tan x - \sqrt{3} \geq 0$ ssi $\tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$

On sait que : $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Les arc $MJ$ et $M'J'$ en rouge correspond a tous les points $M(x)$ tq $x$ vérifie $3\tan x - \sqrt{3} \geq 0$

Donc




$S = \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right[ \cup \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

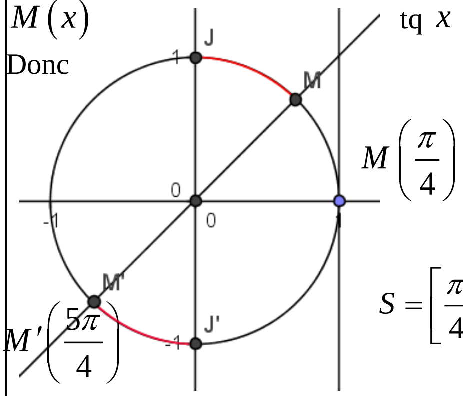
**Exemple9 :** Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\tan x - 1 \geq 0$

On a $\tan x - 1 \geq 0$ ssi $\tan x \geq 1$

On sait que : $\tan\frac{\pi}{4} = 1$

Les arc $MJ$ et $M'J'$ en rouge correspond a tous les points $M(x)$ tq $x$ vérifie $\tan x - 1 \geq 0$

Donc




$S = \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[ \cup \left[\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right[$

**Exercice4 :1)** a)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 = 0$ et en déduire les solutions dans $[0\,;2\pi]$

b) résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation suivante :

$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$

**2)**Résoudre dans $[0\,;\pi]$ l'inéquation suivante :

$(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$

**Correction: 1)** a)on pose $t = \sin x$

$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$ ssi $2t^2 - 9t - 5 \leq 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2 - 9t - 5$ :

Calcul du discriminant : Δ = (-9) $^2$ – 4 x 2 x (-5) = 121

Les racines sont : $t_1 = \frac{9-\sqrt{121}}{2\times 2} = -\frac{1}{2}$ et

$t_2 = \frac{9+\sqrt{121}}{2\times 2} = 5$ Donc $\sin x = -\frac{1}{2}$ et $\sin x = 5$

Or on sait que $-1\leq \sin x\leq 1$ donc l'équation $\sin x=5$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sin x=-\frac{1}{2}$ ssi $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ssi $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$

ssi $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ : $0\leq -\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq 2\pi$

et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\leq -\frac{1}{6}+2k\leq 2$ Donc $\frac{1}{12}\leq k\leq\frac{13}{12}$ Donc

$0,08\leq k\leq 1,02$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=1$

Pour $k=1$ on remplace on trouve

$$x_1=-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}$$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ : $0\leq\frac{7\pi}{6}+2k\pi\leq 2\pi$

et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\leq\frac{7}{6}+2k\leq 2$ Donc $-\frac{7}{12}\leq k\leq\frac{5}{12}$ Donc

$-0,5\leq k\leq 0,41$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on remplace on trouve $x_2=\frac{7\pi}{6}$

Donc $S_{[0;2\pi]}=\left\{\frac{11\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right\}$

**1)** b) $2\sin^2 x-9\sin x-5\leq 0$ ssi

$$2\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)(\sin x-5)\leq 0$$

Or on sait que $-1\leq\sin x\leq 1$ donc $-1\leq\sin x\leq 1<5$

Donc $\sin x-5<0$

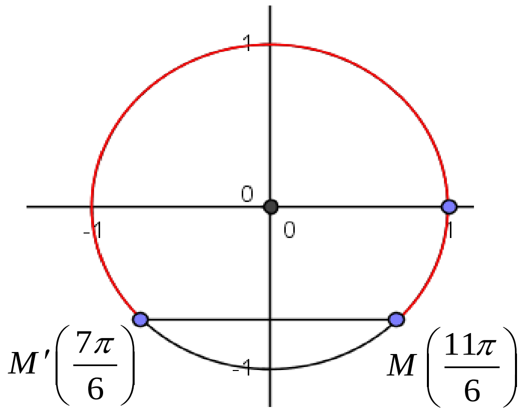
Puisque $\sin x-5<0$ et $2>0$ alors

$2\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)(\sin x-5)\leq 0$ ssi $\sin x+\frac{1}{2}\geq 0$

ssi $\sin x\geq -\frac{1}{2}$ ssi $\sin x\geq\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

L'arc en rouge correspond a tous les points $M(x)$

tq $x$ vérifie $\sin x\geq -\frac{1}{2}$




donc $S=\left[0;\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{6};2\pi\right]$

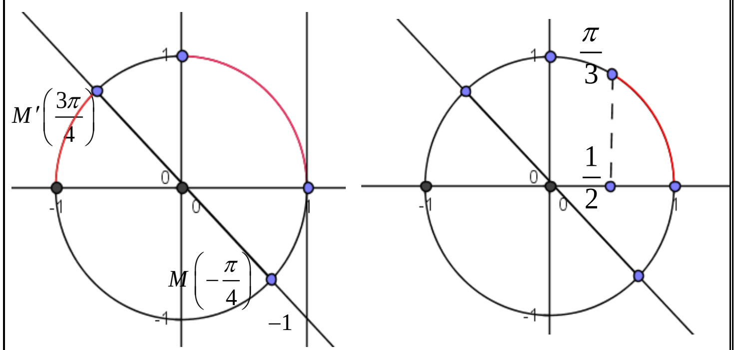
**2)** l'inéquation $(2\cos x-1)(\tan x+1)\geq 0$ est définie

dans $[0;\pi]$ ssi $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

Donc $D=[0;\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$2\cos x-1\geq 0$ ssi $\cos x=\frac{1}{2}$ ssi $\cos x\geq\cos\frac{\pi}{3}$

$\tan x+1\geq 0$ ssi $\tan x\geq -1$ ssi $\tan x\geq\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$




| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\cos x-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $\tan x+1$ | | $+$ | | $+$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(2\cos x-1)(\tan x+1)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |

donc $S=\left[0;\frac{\pi}{3}\right]\cup\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$

*« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien*